AD ANGVLARIVM SECTIONVM ANALYTICEN.

THEOREMATA. ΚΑΘΟΛΙΚΩΤΕΡΑ.

A FRANCISCO VIETA FONTEnæensi primum excogitata, at absque vlla demonstratione ad nos transmissa, iam tandem demonstrationibus confirmata.

Operâ & studio ALEXANDRI ANDERSONI SCOTI.

PARISIIS,
Apud OLIVERIVM DE VARENNES via Iacobæa sub signo Lilij.

Anno, M. DC. XV.

ILLVSTRISSIMO
ET GENEROSISSIMO.

PRINICPI CAROLO. D. G. VVALLIÆ Principi duci Eboracenſi, & Rotheſienſi, magno Scotiæ Seneſcallo, ac inſularum Britannicarum Domino, &c.

NAtura parens non magis benigna quam prouida, (Illuſtriſſime Princeps) *vt quemque ad altiora euexit, ita* γενναῖον λῆμα, *eiuſdem animo indidit, quo quæ infra ſunt ſortem deſpectuiſint, quæ iuxta, faſtidio, & ſuperiora tantum ſuſpiciendo in accliui ſemper pendeat: laudabilis equidem conatus, modò ratio ducat, et in ſublime nitenti non deficiant vires. neque enim ſummo gloriæ præmio certa poſita eſt meta, quâ vlterius procurrere non detur: at Celſitudo Veſtra ad imperia nata, cuius dominio orbis noſter Britãnicꝰ, ac mare circũfluũ ſua ſpõte ſe ſubmittũt, honoris et gloriæ illud faſtigium hactenus tangit, imo tenet: quorſum itaque tẽdet generoſa hæc animi magnitudo? Imperij fines vlterius*

proferre, exteras nationes ſub iugum mittere, hoſtibus terrori, ſociis auxilio eſſe, belli armorumque ſumma ducitur gloria: at ſuæ ſunt & pacis artes, quæ & animi magni aciem hebeſcere non patiantur. Sereniſſimi Domini noſtri, Inuictiſſimi Regis, Parentis Veſtri, virtutes animo perluſtret, C.V. perſpiciat quã lõge ſuper alios huius æui dynaſtas interiore illo animi cultu emineat, qui pacis bellique leges moderatur, ac ſecundat euentus: regia hæc certè at rara virtus, non niſi prudentiâ inſtructus ac munitus capeſſere rempublicam, in qua non vis ſed ratio dominetur. ſed & principe digna, & animo generoſo proxima, illa quoque ſtudia, quæ pace belloque eſſe poſſunt et vſui & oblectamento: Matheſin dico, à viris principibus et natam, & excultam. delicias quærit et voluptatem? quum reliqua humana faſtidio ſint, & infra Celſitudinis veſtræ ſortem eximiam, mẽtem huc dirigat, & exemplo regio diſcat, quãta animi voluptate, affectus quondam regiâ ſtirpe digniſſimus Ptolomęus, quum horum ſtudiorum amœnitate delinitus, mellitis hiſce vocibus ſibi adblandiretur.

Οἶδ' ὅτι θνατὸς ἐγὼ καὶ ἐφάμερος· ἀλλ' ὅταν ἄστρων
Μαστεύω πυκινὰς ἀμφιδρόμους ἕλικας,
Οὐκ ἔτ' ἐπιψαύω ποσὶ γαίης, ἀλλὰ παρ' αὐτῷ
Ζηνὶ, διοτρέφεος πίμπλαμαι ἀμβροσίης.

Noui ego mortalis quod ſim, ſed ſidera quando
Suſpicio, ętherias luſtroque mente domos,
Iam pede non videor mihi terram tangere, magno
Cum Ioue ſed veſci, nectare & ambroſiæ.

Vſum cur memorem, quum aliud nil loquantur hiſtoriæ,

numeroſas

numerosas acies vel unius hominis industriâ profligatas, disiectas classes, et quod hominum pene fidem superet, ignem cœlitus quasi direptum ad stadia aliquot in hostium subuersionem eiaculatum: fortissimos denique duces horum studiorum subsidio victorijs triumphisque cumulatos, ęternum retulisse decus: quorum virtutem ęmulata C. V. si (pro studio in has artes) hoc quidquid est exigui, adspectu fuerit dignata, mercedem longe supra laborum meritum, retulisse me æstimabo. Et si principibus ea demum grata sunt, quæ pulchra et inuentu rara, specula vel inde mihi adfulget aliqua illud non adspernaturam. quin & gentis nostræ conditio in C. V. obsequium nata, omnes conat⁹ et labores eo tādē dirigere suadet, vt tāto nos principe, (quâ id fieri potest), dignos, inque omne officiū promptos, paratosque nos subditos præbeamus: votaque debita D. O. M. Regū Regnorumque conseruatori assiduè iteremus, pro salute, incolmitate, ac longæua ad republicæ Britannicæ clauum, Serenissimi ac Inuictissimi Domini nostri parentis vestri, præsidentia: Regalē pârētis alterius, tum C. V. fœlicem ac prosperum statum ijsdem votis concludentes. Valete & diu fœliciterque Viuite. LVTETIÆ Parisiorum postridie Kalend. Ianuarias. Anno M. DC. XV.

Serenissimo nomini, Celsitudinique Vestræ,
Deuotissimus subditus.

ALEXANDER ANDERSONVS.

AD

ANGVLARES SECTIONES THEOREMATA

ΚΑΘΟΛΙΚΩΤΕΡΑ.

THEOREMA. I.

SI fuerint tria triãgula rectãgula, quorum primi angulus acutus, differat ab acuto secundi, per acutum tertij, & sit excessus penes primum, latera tertij recipiunt hanc similitudinem.

Hypotenusa, sit similis rectanlo sub hypetunisis primi & secundi.

Perpendiculum, simile rectangulo sub perpendiculo primi & base secundi, minus rectangulo sub perpendiculo secundi, & base primi.

Basis, rectangulo, sub Basibus primi et secundi, plus

quoque A G in I C plus G B in I C, æquale A B in IC; & proinde A G in A I plus A B in I C, plus G B in A I, æqualia erunt A B in A C: sed G B in A I æquale est D B in E B minus D B in I B, (est enim G B ad D B vt E I vel E B minus I B, ad A I) & D B in I B ęquale est AB in I C (est enim I B ad I C vt A B ad D B) ergo A G in A I plus A B in I C, plus E B in D B, minus AB in I C, id est A G in A I siue A D in A E plus D B in E B, æqualia erunt A B in A C, hisce igitur ipsi A B applicatis, orietur latitudo A C, eritque A B quadratum ad A D in A E, plus E B in D B, vt AB ad A C, quod erat secundo loco ostendendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Eadem est demonstrationis vis, quum triangulorum diuersæ sunt hypotenusæ, vt in triangulis A K H, A D B, A C B, nam propter triangulorum similitudinem, erit vt A B quadratum, ad A E in A D plus E B in D B, ita A *B* in A H, ad A D in A K plus DB in kH: siquidem est vt A B ad A H ita A E ad A *K*, & E B ad K H, itemque vt A *B* quadratum ad A *B* in A H, ita E *B* in A D minus D *B* in A E, ad K H in A D minus D *B* in A K.

Sit trianguli primi perpendiculum. 1. *Basis.* 2.
Secundi perpendiculum. 1. *Basis.* 3.
Trianguli tertio similis sit perpendiculum. 1. *Basis.* 7.

THEOREMA. II.

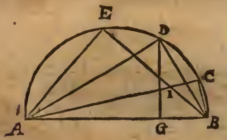
SI fuerint tria triangula rectangula, quorum primi angulus acutus adiunctus acuto secundi, æquet acutum tertij, latera tertij recipiunt hanc similitudinem.

Hypotenusa, fit similis rectangulo sub hypotenusis primi & secundi.

Perpendiculum, simile rectangulo sub perpendiculo primi, & base secundi, plus rectangulo sub perpendiculo secundi & base primi.

Basis, rectangulo sub basibus primi & secundi, minus rectangulo sub perpendiculis eorundem.

Repetatur superioris Theorematis diagramma, in quo est A G ad A D vt C *B* ad I *B*, & rectangulum A D in C *B* æquale rectangulo A G in I *B*.



Est autem A B in E B, æquale ipsis A G in I B, A G in I E & G B in B E id est G B in B I plus G B in I E: & est A B ad D B, vt A I, ad I E, & rectangulum A B in I E, æquale rectangulo D B in A I, sed A B in I E, æquale est A G in I E plus G B in I E: quibus addatur G B in I B, id est D B in I C (est enim G B ad D B, vt I C ad I *B*) erunt A G in I E plus G B in I E, plus G B in I B æqualia A I in D B plus I C in D B, id est D B in A C. er-

go, A G in I B, id est A D in C B plus D B in A C æqualia erunt A B in E B: & omnibus ipsi A B applicatis, erit A B quadratum ad A D in C B plus D B in A C, vt A B ad E B. quod erat demonstrandum.

Rursus est A B ad A D, vt A I id est A C minus I C ad A E, & rectangulum A B in A E, æquale rectãgulo A D in A C minus rectangulo A D in I C: sed rectangulum A D in I C est æquale rectangulo C B in D B, (est enim A D ad D B, vt C B ad I C) ergo rectangulum A B in A E, æquale erit rectangulo A D in A C minus rectangulo C B in D B, & omnibus ipsi A B applicatis, erit A B quadratum ad A D in A C minus C B in D B, vt A B ad A E, quod erat demonstrandum. eodemque modo licet hypotenusæ triangulorum inęquales fuerint, vt prius animaduersũ est.

Sit trianguli primi perpendiculum 1. Basis. 7.
Secundi perpendiculum. 1. Basis. 3.
Trianguli tertio similis perpendiculum erit. 1. Basis. 2.

THEOREMA. III.

SI fuerint duo triãgula rectãgula, quorũ angulus acutus primi, sit submultiplus ad angulum acutum secundi. Latera secundi, recipiunt hanc similitudinem.

Hypotenusa sit similis potestati conditionariæ hypotenusę primi: est autem potestas conditionaria, quæ sequitur gradum proportionis multiplæ, quadratum videlicet in ratione dupla, cubus in tripla, quadrato-quadratum in quadrupla, quadrato-cubus in quintupla, & eo in infinitum progressu.

Ad similitudinem autem laterum circa rectum hypotenusæ congruentium, efficitur à base et perpendiculo primi vt binomiâ radice, potestas æque alta, & singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successiue, vtrobique primum adfirmata, deinde negata, et harum primæ parti similis fit Basis secundi, perpendiculum reliquæ.

Sic in ratione duplâ, Hypotenusa secundi, fit similis quadrato hypotenusæ primi: seu aliter, aggregato quadratorum à lateribus circa rectum: Basis differentiæ: Perpendiculum duplo sub prædictis lateribus rectangulo.

In ratione tripla, Hypotenusa secundi fit similis cubo hypotenusæ primi, Basis cubo basis primi, minus solido ter sub quadrato perpendiculi primi, et base eiusdem: Perpendiculum simile solido ter sub perpendiculo primi, & quadrato basis eiusdem, minus cubo perpendiculi.

In ratione quadrupla, Hypotenusa secundi, fit similis quadrato-quadrato hypotenusæ primi: Basis quadrato-quadrato basis primi, minus plano-plano sexies sub quadrato perpendiculi primi, et quadrato basis eiusdem; plus quadrato-quadrato perpendiculi. Perpendiculum simile plano-plano quater, sub perpendiculo primi et cubo basis eiusdem, minus plano-plano quater, sub perpendiculo primi & base eiusdem.

In ratione quintupla, Hypotenusa secundi fit similis quadrato-cubo hypotenusæ primi, Basis similis quadrato-cubo basis primi minus plano-solido decies, sub cubo perpendiculi primi & quadrato basis eiusdem, plus plano-solido quinquies sub perpendiculo primi, & quadrato-quadrato basis eiusdem: Perpendiculum plano-solido quinquies sub quadrato-quadrato perpendiculi primi, & base eiusdem,

minus

minus plano-solido decies, sub quadrato perpendiculi & cubo basis eiusdem, plus quadrato-cubo basis eiusdem.

Sit triangulum rectangulum quodcunque, cuius hypotenusa Z. perpendiculum B. basis D. erit igitur ex demonstratis theoremate secundo, pro triangulo anguli dupli, (quandoquidem duplum differt à dimidio per ipsum dimidium.) vt Z q. ad D q. ita Z ad basin anguli dupli: & ex iisdem vt Z q. ad D in B bis, ita Z ad perpendiculum dupli, & iterum, vt Z cub. ad D cub. minus D in B q. ter, ita Z ad basin trianguli anguli tripli. & indidem Z cub. ad D q in *B* ter, minus *B* cubo, vt Z ad perpendiculum eiusdem trianguli anguli tripli.

-- B q.

Et Z q q. ad D q q. minus D q. in *B* q. sexies, plus *B* q q, vt Z ad basin trianguli anguli quadrupli. & Z q q. ad D cub. in B quater, minus *B* cubo in D quater, vt Z ad perpendiculũ eiusdẽ trianguli anguli quadrupli.

Atque ita ex ductu hypotenusarum, laterumque circa rectos angulos pro rationum similitudine iam demonstratâ, prouenient triangulorum angulorum multiplicium lateribus homologa in infinitum, eâ quâ propositum est methodo, vt ex tabella subiecta, clarius perspicere est.

Trianguli rectanguli

	Hypotenusa.	Latera circa rectũ. Basis. Perpẽdiculũ.	Anguli. Basis.	Perpendiculum.
	Z.	D. B.		
Potestas rationis. Duplæ.	Zq.	Dq. D in B. bis. Bq.	Dupli. Dq. -Bq.	D in B bis.
Triplæ.	Z.cub.	Dc. D q in B 3. D in B q 3. Bcub.	Tripli. Dc. --D in B q. 3.	Dq in B. 3. --B cub.
Quadruplæ.	Zqq.	Dqq. Dcub. in B. 4. D q in B q. 6. D in B c. 4. —+ B qq	Quadrupli. D qq. -D q. in B q 6. -+ B qq.	Dc. in B. 4. -D in B C. 4.
Quintuplæ.	Zqc.	D qc. D qq in B. 5. D c in B q. 10. D q in B c. 10. D in B qq. 5. B qc.	Quintupli. Dqc. -D c in B q. 10 -+D in B qq. 5.	Dqq in B. 5. -D q. in B C. 10 -+ Bqc.

Atque eo in infinitum progressu, dabitur laterum ratio in ratione anguli ad angulum multipla, vt præscriptum est, quod erat demonstrandum.

Proponatur triangulum rectangulum cuius basis 10. perpendiculum 1. & angulus acutus eiusdem intelligatur simplus.

Ad triangulum anguli dupli, statuetur basis 99. perpendiculum 20.
Ad triangulum anguli tripli, statuetur basis 970. perpēdiculū, 299
Ad triāgulū anguli quadrupli, statuetur basis 9401. perpēdiculū 3960.
Ad triangulum anguli quintupli, statuetur basis 90050. perpendiculum 49001.

Cum autem factorum nequit fieri subtractio, argumentum est angulum multiplum esse obtusum, eoque casu nihilominus excessus factorum adsignabitur lateri, & angulus subtensus intelligetur exterior multipli.

IDEM ALITER.

Phrasi Geometricæ accommodatum.

SI fuerint triangula rectangula quotcunque, et horum secundi angulus acutus sit duplus ad acutum primi, tertij triplus, quarti quadruplus, quinti quintuplus, et eo continuo naturali progressu, primi autem trianguli perpēdiculum statuatur prima proportionalium, basis eiusdem secunda, eaque series continuetur.

In secundo, erit basis ad perpendiculum, vt tertia minus prima, ad secundam bis.

In tertio, vt quarta minus secunda ter, ad tertiam ter, minus prima.

In quarto, vt quinta minus tertia sexies, plus prima, ad quartam quater, minus secunda quater.

In quinto, vt sexta, minus quarta decies, plus secunda quinquies, ad quintam quinquies, minus tertiâ decies, plus prima.

In sexto, vt septima, minus quinta quindecies, plus tertia quindecies, minus prima, ad sextā sexies, minus quarta vicies, plus secunda sexies.

In ſeptimo, vt octaua minus ſexta vicies ſemel, plus quarta tricies quinquies, minus ſecunda ſepties, ad ſeptimam ſepties, minus quinta tricies quinquies, plus tertia vicies ſemel, minus prima.

Et ita in infinitum, diſtributis ſucceſſiue in duas partes proportionalibus, ſecundum earum ſeriem, vtrobique primum adfirmatis deinde negatis, & ſumptis multiplicibus, vt ordo graduum in artificioſa geneſi poteſtatum, quibus ea addicuntur exigit.

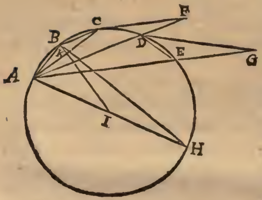
Quæ quidem omnia, ſuperius expoſitam tabellam inſpicienti, clara ſunt.

THEOREMA IIII.

SI à puncto in peripheria circuli, ſumantur ſegmenta quotcunque æqualia, & ab eodem ad ſingula ſectionum puncta rectæ educantur: erit vt minima ad ſibi proximam, ita reliquarum quæuis à minima deinceps, ad ſummam duarum ſibi vtrinque proximarum.

Sit circuli circumferentia quantalibet A E, ſecta in partes quotcunque æquales, quibus ſubtendantur rectæ A B, B C, C D, D E, & educantur rectæ A C, A D, A E: iunganturque rectæ C F, D G ipſis C A, D A æquales.

erit



Erit igitur vt A B ad A C, ita A C ad A F, & A D ad A G, ob similitudinem triangulorum Isoscelium, A B C, A C F, A D G. est autem recta A F æqualis ipsis A D, A B: nam in triangulo æquicrure A C F, est angulus C F A æqualis angulo C A F, id est angulo B A C, angulus vero C D A anguli B A C duplus est, (siquidem duplæ circumferétiæ insistit.) est igitur C D A angulus duplus anguli C F D, atqui ęqualis est duobus C F D, F C D, sút itaque anguli C F D, F C D æquales: lateraque C D, D F æqualia: at latus C D æquale est ipsi A B, ergo & F D ipsi A B æqualis erit; & recta A F æqualis compositę ex A D, A B, similiter in triangulo Isosceli A D G, sunt anguli D A G, D G A ad basin, æquales, est itaque angulus D G A, æqualis angulo C A D, & angulus D E A externus trianguli D G E, æqualis triplo eiusdem anguli C A D vel D G E: siquidem triplæ circumferentiæ insistit, qualium igitur partium est angulus D G E vnius, talium est angulus E D G duarum: est itaque triangulum E D G ęqui angulũ triangulo A C D, & latus D E æquale lateri C D, erit igitur & latus E G æquale lateri C A, rectaque A G æqualis compositæ ex A C, A E, vt igitur A B ad A C i-

ta A C ad compositam ex A B, A D, & ita A D ad
AE ad compositam ex A C, C E, atque ita deinceps si plura, fuerint segmenta: quod erat demonstrandum. atque hinc

ZETETICVM.

IN circulo duas circumferentias sumere in ratione multiplâ datâ, in qua etiam se habeant rectarum quæ ipsis circumferentiis subtenduntur quadrata.

Sit datus circulus qui supra, A B H, cuius diameter sit A H, semidiameter B I, ducaturque recta B H & sint circumferentiæ A B, A C in ratione dupla, A B, A D, in ratione tripla, A B, A E in ratione quadrupla &c. erit igitur B I ad B H, vt A B ad A C, propter similitudinem triangulorum B I H, A B C : ergo $\frac{BH \text{ in } AB}{BI}$ æquabitur ipsi A C, vt autem A B ad $\frac{BH \text{ in } AB}{BI}$, ita $\frac{BH \text{ in } AB}{BI}$ ad $\frac{BHq. \text{ in } ABq.}{AB \text{ in } BIq.}$ quod multatum ipsa A B, dat $\frac{BHq. \text{ in } ABq. -- ABq. \text{ in } BIq.}{AB \text{ in } BIq.}$ id est $\frac{BHq. \text{ in } AB -- BIq. \text{ in } AB.}{BIq.}$ æquale ipsi A D ex precedenti propositione. Igitur vt B I q. ad $BHq. -- BIq.$ ita A B ad A D: vel quoniam est vt A H ad A B ita A B, ad B K, quadratũ igitur B K, erit $\frac{ABqq.}{AHq.}$ & $\frac{ABq \text{ in } AHq. -- ABqq.}{AHq.}$

$$-\frac{AB\,q.\,in\,AH\,q.4.}{AH\,q.}$$

æquabitur AK quadrato: & $-\frac{AB\,qq.\,4.}{AH\,q.}$ æquabitur AC quadrato: hoc autem ex precedenti theoremate æquale est ipsis AB q. ablato igitur communi AB

$$+ AB\,in\,AD$$

quadrato, $-\frac{AB\,q.\,in\,AH\,q.\,3. -- AB\,qq.\,4.}{AH\,q.}$ æquabitur AB, in AD: & hisce ipsi AB applicatis $\frac{AB\,q.\,in\,AH\,q.3. -- AB\,qq.\,4.}{AB\,in\,AH\,q.}$ æquabitur AD, id est $\frac{AB\,in\,AH\,q.3. -- AB\,cub.\,4.}{AH\,q.}$ erit igitur vt AH q. ad AH q.3. $--\,AB\,q.\,4.$ ita AB ad AD. Iterum vt AH ad BH, ita AB ad AK: & $\frac{BH\,in\,AB}{AH}$ æquale ipsi AK, ergo $\frac{BH\,in\,AB}{AI.}$ æquabitur ipsi AC. vt autem AB ad $\frac{BH\,in\,AB}{AI.}$, ita hoc, ad $\frac{BH\,q.in\,AB\,q}{AB\,in\,AI\,q.}$, id est $\frac{BH\,q.\,in\,AB}{AI\,q.}$: hoc autem minus $\frac{BH\,q.\,in\,AB,}{AI\,q.}$ AB, æquatur ipsi $-\frac{AI\,q.\,in\,AB}{AI\,q.}$, id est ex predemon-

ſtratis ipſi A D. eſt quoque vt A B ad B H in A B, ita

A I

B H q. in A B HB cub. in A B q BHcub.
ita-AIq. in A B. ad-B H in A Iq. in ABq. id eſt --BH in

AIq. A B in A I. cub.
in A B

A I q in A B, quod multatum ipſa A C, vel BH in AB

AI cub. A I.

B H cub. in A B in A I. B H cub. in A B
id eſt-BH, in AI cub. in A B 2. vel-BH in AIq. in AB2.

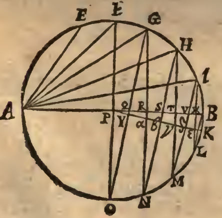
A I q q. A I. cub.
æquatur ipſi A E. vt igitur A I cub. ad B H cub. ita
-BH in AI. q. 2.
A B, ad A E. eademque methodo ſumentur & aliæ pro ratione multipla data: quod erat faciendum. atque huc pertinet analyticum illud artificivm generale quadrandi lunulas, quod attigit Vieta variotum 8. cap. 9.

THEOREMA. V.

SI a termino diametri ſumantur in circulo circumferentiæ quotcunque æquales, & ab altera extremitate educantur rectæ lineæ ad ſumptarũ circumferentiarum æqualium terminos, erit vt ſemidiameter ad rectam à iam dicta extremitate eductam diametro proximam, ita quælibet intermedia, ad ſummam duarum, in eâdem ſemiperipheria.

pheria sibi vtrinque proximarum. at si circumferentiæ sumptæ æquales, semiperipheriam superent, ita minima educta, ad differentiam, duarum sibi vtrique proximarum.

Sit circulus cuius diameter A B, centrum P, eiusque peripheria à puncto B, secetur in partes quotcũque BI, I H, H G, GF, F E, &c. æquales, quibus æquales quoque sint, B L, L M, M N, N O, sintque ab altero diametri extremo A, eductæ rectæ ad æqualium sectionum terminos, A I, A H, A G, A F, A E, &c. & eductis rectis, connectantur puncta, B L, I L, I M, H M, H N, G N, G O, &c. quæ prioribus ab A puncto eductis erunt sigillatim æquales, totidem quippe ac æqualibus segmentis subtensæ, secentque semidiametũ P B in punctis P, Q, R, S, T, V, X: tum minimam B L secet recta P K ex centro ad angulos rectos, secans & reliquas ipsi B L parallelas in punctis Y, α, β, γ, δ, ε, & ad angulos rectos.

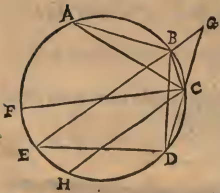


Et quoniam rectæ IL, H M, G N, F O, connectunt puncta a termino diametri B æqualiter vtrinque remota, erunt hæ ad diametrum perpendiculares, ac vt A B ad A I, ita Q O ad O P, & G Q ad G R, ergo ita to-

ta G O, ad compositam ex O P, G R: sic H N ad cõpositam ex R N, H T: atque ita & reliquæ intermediæ ad compositas ex semissibus duarum sibi vtrinq; proximarum: similiter, vt A B ad A I, ita G α ad G γ, & α N ad N ε, ergo vt A B ad B I, ita tota G N, ad compositam ex semissibus G γ, N β, sibi vtrinque proximarũ: atq;ita HM, ad cõpositã ex semissib⁹ vtrinque proximarũ H β, M δ atque ita de reliquis: vt autẽ intermedia quælibet ad duarum sibi vtrinque proximarum semisses, ita dupla intermediæ ad compositam ex ijsdem: ergo vt diameter ad diametro proximam, ita dupla intermediæ ad compositam ex duabus sibi vtrinque proximis, & vt semidiameter ad diametro proximam, ita intermedia simplex, ad cõpositam ex duabus sibi vtrinque proximis, quod erat demonstrandum.

Sit secũdo circuli peripheria cui⁹ diameter FC, secta in partes æquales F A, A B, B D, D H, quæ semiperipheriam superent, sitque minima alterutri semicirculo inscripta, B C, vel C D: dico vt semidiameter ad subtensam maximam, ita B C ad differentiam ipsarum A C, C D, seu C D, ad differentiam ipsarum B C, C H.

Subtendatur enim A C, & fiant B G, B C æquales, (productâ nimirum D C in G,) & protendatur G B in E, ducaturque E D: erit igitur angulus B C G id est B G C æqualis angulo B E D, id est B C A. (sunt enim sumptæ circumferentiæ B D, B A æquales.) anguli quoque B A C, B D C æquales sunt, & latera B G, B C ęqualia ex constructione: Ergo & A G, D G, æquales quoque erunt: est autem vt semidiamete



ad ſubtenſam maximam, ita B C ad C G (eſt enim angulus B C G æqualis angulo B E D, quem facit quoque diameter cũ ſubtenſarum maxima.) differentiam ipſarum AC, CD quod erat demõſtrandum.
Eodem modo oſtendetur eſſe quoque D C, ad differentiam H C, C B, vt ſemidiameter ad eductarum maximam.

THEOREMA VI.

SI a termino diametri ſumantur in circulo circumferentiæ quotcunque æquales, & ab altera extremitate educantur lineæ rectæ ad ſumptarum circumferentiarum æqualium terminos, eductæ ſiunt baſes triangulorum, quorum communis hypotenuſa eſt diameter, ac baſis quidem diametro proximior intelligitur baſis anguli ſimpli, ſuccedens dupli, & eo continuo ordine: conſtituatur autem ſeries rectarum linearum continuè proportionalium, quarum prima ſit æqualis ſemidiametro, ſecunda, baſi anguli ſimpli, is reliquarum baſium ordine ſuccedentium erit progreſſus.

Tertia continue proportionalium, minus prima bis, erit æqualis baſi anguli dupli.

Quarta, minus ſecunda ter, baſi anguli tripli.

Quinta, minus tertia quater, plus prima bis, basi anguli quadrupli,

Sexta, minus quarta quinquies, plus secunda quinquies, basi anguli quintupli.

Septima, minus quinta sexies, plus tertiâ nouies, minus prima bis, basi anguli sextupli.

Octaua minus sexta septies, plus quarta quater decies, minus secunda septies, basi anguli septupli.

Nona, minus septima octies, plus quinta vicies, minus tertia sedecies, plus prima bis, basi anguli octupli.

Decima minus octaua nouies, plus sexta vicies & septies, minus quarta tricies, plus secunda nouies, basi anguli nouemcupli.

Et ita in infinitum, vt per loca proportionalium imparia noua affectio succedat, affirmatæ negata, negatæ adfirmata, & proportionales illæ sint semper alternæ, et multiplices quidem, in prima adfectione, per vnitatis crementum, in secunda, per numeros triangulos, in tertia, per numeros pyramidales, in quarta per numeros triangulo-triãgulos, in quinta per numeros triangulo-Pyramidales: non quidem ab vnitate, vt in potestatum genesi, sed à binario suum ducentes incrementum.

Sit semicirculi cuiusuis peripheria secta in partes quotcumque æquales, cuius quidem semidiameter esto Z, & ab extremo diametri educantur rectæ ad quælibet sectionum puncta, quarum rectarum prima sit B. erit itaque ex præcedenti theoremate vt Z ad B, ita B ad compositam ex diametro, & ex ea quæ ipsam B proxime subsequitur: est autem ea Bq. quæ

$\overline{Z}$.

multata

multata diametro vel semidiametro bis, relinquit $\frac{Bq. -- Zq.\ 2.}{Z}$ æquale tertiæ, deinde vt Z ad B ita $\frac{Bq. -- Zq\ 2}{Z}$ ad compositam ex secunda & quarta, a quâ ablata secunda B, relinquetur $\frac{Bc. -- Zq.\ \text{in}\ B\ 3.}{Zq.}$ æqualis quartæ.

atque ita si quod fit sub secunda & vltima, ipsius Z Epanaphoræ, seu gradui qui elatiori potestati proxime succedit applicetur, multeturque proxime antecedente, prouenient reliquæ proportionales eo quo dictum est modo affectæ, in infinitum:

sic $\frac{Bqq. -- Zq.\ \text{in}\ Bq\ 4. + Zqq.\ 2.}{Zcub.}$ erit æquale quintæ. $\frac{Bqc. -- Zq.\ \text{in}\ Bc\ 5. + Zqq.\ \text{in}\ B\ 5.}{Zqq.}$

æquale erit sextæ. $\frac{Bqqq. -- Zq.\ \text{in}\ Bqq.\ 6. + Zqq.\ \text{in}\ Bq.\ 9. -- Zqqq.\ 2.}{Zqc.}$ septimæ.

$\frac{Bqqc. -- Zq.\ \text{in}\ Bqc.\ 7. + Zqq.\ \text{in}\ Bc.\ 14. -- Zqqq.\ \text{in}\ B.\ 7.}{Z\ c.\ cub.}$ octauæ. $\frac{Bqcc. -- Zq.\ \text{in}\ Bcc.\ 8. + Zqq.\ \text{in}\ Bqq.\ 20. -- Zcc.\ \text{in}\ Bq.\ 16. + Zqcc.\ 2.}{Zqqc.}$

BCCC.
-Zq in. B qqc. 9.
+Zq q. in B q c. 27.
nonæ. --Zqqq. in B c. 30. decimæ.
+Zqqqq. in B. 9.

Zqcc.

Atque ita deinceps quod erat demonstrandum.

In notis, sit semidiameter. 1. Basis prima. 1. N. erit

1 Q -- 2.		*Dupli.*
1 C -- 3. N.		*Tripli.*
1 QQ - 4. Q + 2.	*Basis*	*Quadrupli.*
1 QC - 5 C + 5. N.	*An-*	*Quintupli.*
1 CC -- 6 QQ + 9 Q -- 2.	*guli.*	*Sextupli.*
1 QQC - 7 QC + 14 C -- 7 N.		*Septupli.*
1 QCC - 8 CC. + 20 QQ - 16 Q + 2		*Octupli.*
1 CCC - 9 QQC + 27 QC - 30 C + 9 N		*Nouemcupli.*

Et sic continuò radicem binarium cum sibi proximo iungendo, & compositum cum numero illis proxime deinceps componendo, creabuntur reliqui afficientium multiplicium numeri in infinitum, iuxta seriem subiectæ tabellæ.

NVMERI MVLTIPLICIVM Adfectionis.

Prima negata	*Secunda affirmata*	*Tertia negata.*	*Quarta affirmata*	*Quinta negata.*	*Sextâ affirmatâ*	*Septima negata.*	*Octaua affirmata*	*Nona negata.*
2								
3								
4	2							
5	5							
6	9	2						
7	14	7						
8	20	16	2					
9.	27	30	9					
10	35	50	25	2				
11.	44	77	55	[illegible]				
12.	54	112	105	36	2			
13	65	156	182	91	13			
14	77	210	294	196	49	2		
15	90	275	450	318	140	15		
16	104	552	660	672	336	64	2	
17	119	442	935	1122	714	204	17	
18	135	546	1287	1782	1386	540	81	2
19.	152	665	1729	2717	2508	1254	287	19
20	170	800	2275	4604	4290	2640	825	100
21.	189	952	2940	5733	7007	5148	2079	385

THEOREMA VII.

Si a puncto in circuli circumferentia sumantur partes quotcunque æquales, et ab eodem educantur rectæ lineæ ad sumptarum circumferentiarum æqualium terminos: constituatur autem series linearum rectarum continue proportionalium, quarum prima sit æqualis minimæ eductæ, secunda a minima secundæ, is reliquarum eductarum ordine succedentium erit progressus.

Tertia continue proportionalium, minus prima, erit æqualis tertiæ.

Quarta minus secunda bis, quartæ.

Quinta minus tertia ter, plus prima, quintæ.

Sexta minus quarta quater, plus secunda ter, sextæ.

Septima minus quinta quinquies, plus tertia sexies, minus prima, septimæ.

Octaua minus sexta sexies, plus quarta decies, minus secunda quater, octauæ.

Nona minus septima septies, plus quinta quindecies, minus tertia decies, plus prima, nonæ.

Decima minus octaua octies, plus sexta vicies et semel, minus quarta vicies, plus secunda quinquies, decimæ.

Et ita in infinitum vt per loca proportionalium imparia noua adfectio succedat, affirmatæ negata, negatæ affirmata: et proportionales illæ sint semper alternæ, & multiplices quidem in prima adfectione per vnitatis cremētum, in secunda per numeros triangulos, in tertio per numeros Pyramidales, in quarta per numeros triangulo-triāgulos

in

in quinta per numeros triangulo-pyramidales, ab vnitate vt in potestatum genesi suum ducentes incrementum.

Sit peripheria circuli secta in partes quotuis æquales ab assũpto pũcto aliquo, à quo ad æqualiũ circumferentiarum terminos educantur rectę, quarum quidem minima sit Z, ab hac verò secunda B: est igitur ex theoremate quarto vt prima ad secundam, ita secunda ad compositam ex prima & tertia: erit itaque tertia æqualis $\frac{\text{B q.} - \text{Zq.}}{\text{Z}}$ eademque methodo qua in præcedenti vsi sumus, reperientur $\frac{\text{Bc.} - \text{Z q. in B 2.}}{\text{Z q.}}$ quarta

$\frac{\text{B qq.} - \text{Z q. in B q. 3.} + \text{Zqq.}}{\text{Z c.}}$ quinta. $\frac{\text{B q c.} - \text{Zq in Bc. 4.} + \text{Zqq. in B. 3.}}{\text{Zqq.}}$ sexta.

$\frac{\text{Bcc.} - \text{Zq. in Bqq. 5.} + \text{Zqq. in Bq. 6.} - \text{Zcc.}}{\text{Zqc.}}$ septima. $\frac{\text{Bqqc.} - \text{Zq. in Bqc. 6.} + \text{Zqq. in Bc. 10.} - \text{Zcc. in B 4.}}{\text{Zcc.}}$ octaua.

Bqcc.	Bccc.
--Zq.in Bcc.7.	--Zq.in Bqqc.8.
+Zqq.in Bqq.15.nona.	+Zqq.in Bqc.21.
--Zcc. in Bq.10.	--Zcc. in Bc. 20.
+Zqcc.	+Zqcc. in B.5.
Zqqc. decima.	Zqcc.

Eademque ratione & reliquæ proportionales in infinitum, eo quo propositum est modo affectæ, eductis in circulo rectis æquales producentur: quod erat demonstrandum.

In notis sit minima educta, 1. secunda 1 N. erit.

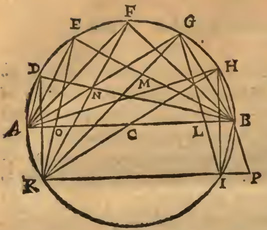
1 Q -- 1.		*Tertiæ.*
1 C -- 2.N.		*Quartæ.*
1 QQ -3.Q + 1.		*Quintæ.*
1 QC -4 C. +3.N.	*Æ-*	*Sextæ.*
1 CC -- 5 QQ +6 Q -- 1.	*quale.*	*Septimæ.*
1 QQC -6 QC +10 C -- 4 N.		*Octauæ.*
1 QCC -7 CC. +15 QQ -10 Q +1		*Nonæ.*
1 CCC -8 QQC +21 QC -20 C + 5 N		*Decimæ.*

Atque ita vnitatem radicem cum sibi proximo iungendo, compositumque cum proxime deinceps sequenti componendo, creabuntur reliqui adficientium multiplicium numeri in infinitum: quos si lubet in tabella ob oculos ponere, id quidem factu facile fuerit, quemadmodum a nobis præstitum est præcedenti propositione.

THEOREMA VIII

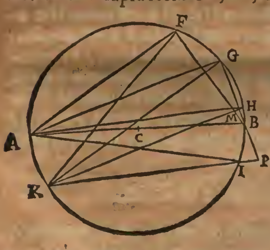
SI a termino diametri ſumantur in peripheria circuli partes quotcunque æquales, & ab eiuſdem diametri extremis educantur rectæ ad ſingula ſectionum puncta: erit vt ſemidiameter ad ſubtenſam partium æqualium vni, ita reliquarum qualibet ab alterutro diametri termino educta, præter diametrum, aut diametro proximam quum in ipſas ſectiones incidunt, ad differentiam duarum a reliquo eiuſdem termino eductarum ad ſectiones ſibi vtrinque proximas: at ita diameter ipſa quum in ſectionem æqualem incidit, vel quum non incidit, ei proxima in ſectionem incidens, ad ſummam duarum ab altero diametri termino, ad proximas vtrinque ſectiones eductarum:

Circa diametrum A B, centro C, deſcribatur circulus, cuius peripheria ſecetur in partes quotcunque æquales A D, D E, E F, F G, G H, H B, B I, educanturque rectæ à punctis B, A, ad ſingulas ſectiones, ſumatur autem & A k ipſi A D quoque æqualis, & ducantur rectæ H I, G I, G K, F K, E K, D K, A K, ſitque ſemidiameter C H, & ſecet recta G I, diametrum in L puncto.



Quoniam igitur recta H I angulum B I L bifariam diuidés, basi perpendicularis est, erit triangulũ B I L Isosceles, & simile triangulo H C B: est auté triãgulum BLI, simile triangulo G A L, est itaque G A L triangulum Isosceles, & latera G A, A L æqualia: vt autem C H ad H B, ita H B vel B I ad B L differentiam laterum A G, A B. similiter quoniam anguli G B E; E k G æquales sunt angulo H C B, (illi si quidem duplæ peripheriæ in circumferentiâ, hic simplæ in cétro insistit.) angulique k E B, B G k æquales angulo C B H æqualibus insistentes circumferentijs. secent se rectę G K, E B, in M, erunt triangula E k M, G B M similia triangulo H C B, & vt H C ad H B ita G B ad G M, differentiam ipsarum G k id est H A, (æqualibus namque subtenduntur circumferentiis:) & E K id est A F. (quæ æquales quoque subtendunt circumferentias.) eodemque modo, secent se rectæ Fk, D B in puncto N, erunt triangula F BN, D K N, æquicrura & similia triangulo H C B, & vt H C ad H B ita F B ad F N, differentiã subtensarum F k, D K, id est vt supra, G A, E A: similiter secent se rectæ Ek, AB in puncto O, eritque vt H C ad HB, ita E B ad E O differentiam

differentiam rectarum E K, A K, id est F A, D A: eodemque modo, demonstrabitur esse vt H C ad H B, ita G A ad differentiam F B, H B, & F A ad differentiam G B, E B, & E A ad differentiam F B, D B. atsi protrahantur H C K, K I P, H B P. erunt triangula H C B, H K P similia, sunt enim anguli H C B, H k P, ille in centro, hic in circumferentia, æquales, & angulus C H B communis vtriq., ergo & reliquus, reliquo æqualis erit. est igitur vt C H ad H B, ita H K ad H P, est autem H P dupla ipsius H B, angulus enim I B P æqualis est angulo H k I, & angulus B P I angulo B H C., Isosceles igitur est triágulum B I P, & crura B P, B I, id est B P, B H æqualia. non transeat iam diameter per sectiones æquales, sed inter sectiones circumferentiam secet in B puncto: ductis vt supra rectis G k, k P, G B P.



Quoniam circumferentiæ G A k, A G H, sunt æquales, (æqualibus positis segmentis A k, G H.) erunt & subtensæ A H, k G æquales: estque vt prius, angulus A G B, æqualis ei quem facit subtensa cuiuis peripheriæ æquali, cum diametro, & G k P æqualis angulo in centro,

Isosceles igitur erit triangulum, G k P, simile ei quod fit a duabus semidiametris, & recta vni æqualium segmentorum subtensa: vt igitur semidiameter ad subtensam dictam, ita k G id est A H, ad G P, est autem B P æqualis ipsi B I, nam in quadrilatero inscripto k G B I, erunt anguli exteriores P B I, B I P æquales interioribus G k I, K G B, est igitur triangulum B I P Isosceles, simile triangulo G k P, lateraque B I, B P æqualia. at vt semidiameter ad subtensam parti æquali, ita & hic quoque B H ad differentiam A G, A I, est enim angulus B H k, æqualis ei qui fit à diametro & subtensa cuiuis segmento æquali, & angulus H B F, æqualis angulo in centro sectionum æqualium vni insistenti, vnde triangulum B M H Isosceles erit, eique simile triangulum F k M, itaque vt radius, ad subtensam cuiuis segmentorum æqualium, ita B H ad H M differentiam rectarum H K, M K, est autem H K æqualis ipsi A I, (sunt enim segmẽta A K, HI, æqualia:) quibus addito communi K I, fiunt k I H, A k I ęqualia, & k F ęqualis ipsi A G, nam segmenta A K, FG, ponuntur ęqualia, quibus addito communi A F, fiũt k A F, A F G ęqualia: eodemque modo ita F G vel k F ad F M, differentiam rectarum B F, B M, vel B H quod erat demonstrandum.

THEOREMA IX.

SI fuerint triangula rectangula æqualis hypotenusæ, quorum primi angulus acutus sit in submultipla ratione ad angulos acutos succedentium ordine triangulorum, ad acutum videlicet secundi subduplus, tertii subtriplus,

quarti ſubquadruplus, et eo continuo ordine: conſtruatur autem ſeries rectarum, continué proportionalium, quarum prima ſit æqualis ſemihypotenuſę, ſecunda perpendiculo anguli primi, inter ſuccedentes continuè proportionales & ſuccedentium triangulorum baſes, ac perpendicula hæc erit æqualitas.

Prima bis, minus tertiâ continuè proportionalium, erit æqualis baſi trianguli ſecundi.

Secunda ter minus quarta, perpendiculo trianguli tertij.

Prima bis minus tertia quater, plus quinta, baſi trianguli quarti.

Secunda quinquies, minus quarta quinquies, plus ſextâ, perpendiculo trianguli quinti.

Prima bis, minus tertia nouies, plus quinta ſexies, minus ſeptimâ, baſi trianguli ſexti.

Secunda ſepties, minus quarta quaterdecies, plus ſexta ſepties, minus octaua, perpendiculo trianguli ſeptimi.

Prima bis, minus tertia ſedecies, plus quinta vicies, minus ſeptima octies, plus nona, baſi trianguli octaui.

Secunda nouies, minus quinta tricies, plus ſexta vicies ſepties, minus octaua nouies, plus decima, perpendiculo trianguli noni.

Et ita in infinitum, inuerſo eo qui in ſexto theoremate expoſitus eſt, ordine.

Sit ſemicirculus qualis ſupra, cuius peripheria ſecta ſit in partes quotcunque æquales, & a terminis diametri educantur triangulorum rectangulorum latera: ſitque ſemidiameter X, trianguli vero ſubmultipli perpendiculum ſit *B*: & fiat vt X ad *B*, ita *B*

$\frac{\text{ad Bq.}}{\text{X}}$

quo à diametro siue ab X bis ablato, erit $\frac{\text{Xq. 2.} - \text{Bq.}}{\text{X}}$ basis trianguli secundi, ex præcedenti theoremate. sic, fiat vt X ad B, ita $\frac{\text{Xq. 2.} - \text{Bq.}}{\text{X}}$ ad $\frac{\text{Xq. in B. 2.} - \text{Bcub.}}{\text{Xq.}}$ hoc addatur ipsi B, (quandoquidem basibus decrescentibus perpendicula augetur.) fiet $\frac{\text{Xq. in B. 3.} - \text{Bc.}}{\text{Xq.}}$ æquale perpendiculo trianguli tertij. eademque methodo erit

$\frac{\text{Xqq. 2.} - \text{Bq. in Xq. 4.} + \text{Bqq.}}{\text{Xc.}}$ Basis trianguli quarti. $\frac{\text{Xqq. in B. 5.} - \text{Bc. in Xq. 5.} + \text{Bqc.}}{\text{Xqq.}}$ perpendiculum trianguli quinti.

$\frac{\text{Xqqq 2.} - \text{Xqq. in Bq. 9.} + \text{Xq. in B qq. 6.} - \text{Bcc.}}{\text{Xqc.}}$ Basis trianguli sexti. $\frac{\text{Xqqq. in B 7.} - \text{Xqq. in Bc. 14.} + \text{Xq. in Bqc. 7.} - \text{Bqqc.}}{\text{Xqqq.}}$ perpendiculum trianguli septimi.

Xqqqq 2.		Xqqqq in *B* 9.	
-- Xqqq. in *B*q. 16.	Basis	- Xqqq. in Bc. 30	perpēdi-
+ Xqq. in Bqq 20.	trian-	+ Xqq. in Bqc 27.	culum
-- Xq. in Bcc. 8.	guli	-- Xq. in Bqqc 9.	trianguli
+ Bqqqq.	octaui.	+ Bccc.	noni.
Xqqc.		Xqcc.	

& eo in infinitum progressu, adscita si placet tabella theorematis sexti.

In notis sit prima continuè proportionalium 1. eademque communis triangulorum rectangulorum semihypotenusa.

Secunda vero continuè proportionalium 1 N. eademque intelligitor perpendiculum trianguli ad angulum pertinentis submultiplum.

2 -- 1Q.		*Basi*		*Dupli.*
3N -- 1C		*Perp.*		*Tripli.*
2 -- 4Q + 1QQ		*Basi*		*Quadr.*
5N. - 5C + 1QC	*Æqua*	*Perp.*	An	*Quint.*
2 - 9Q + 6QQ -- 1CC	*bitur*	*Basi*	gu	*Sextup.*
7N. - 14C + 7QC - 1QQC		*Perp.*	li	*Septup.*
2 - 16Q + 20QQ - 8CC + 1QCC		*Basi*		*Octup.*
9N. - 30C + 27QC - 9QQC + 1CCC		*Perp.*		*Nōcup.*

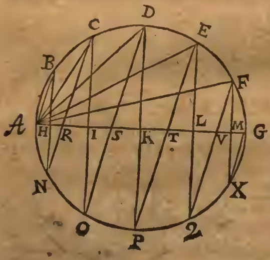
Atque ita deinceps, inuerso ordine theorematis sexti, prout illic determinatum est, nisi quod binis alternatim locis affectionum qualitates mutentur.

THEOREMA. X.

SI secetur semicircumferentia circuli in partes quotcunque æquales, & à termino diametri educantur rectæ ad qualibet sectionum puncta, est vt minima educta ad

diametrum, ita composita ex diametro et minima, et eâ insuper cuius quadratum adiunctum minimæ quadrato, efficit quadratum diametri, ad compositam ex omnibus eductis duplam.

Sit ſemicirculus in punctis A, B, C, D, E, F, G, ſectus in partes quotcunque æquales, & ab A diametri termino, rectæ ad ſectiones educantur A B, A C, A D, A E, A F, A G, diuidatur quoque & ſemicirculus reliquus in totidem ſegmenta prioribus ęqualia A N, N O, O P, P Q, Q X, X G, tum puncta æqualiter à diametri terminis remota connectantur rectis, quę diametrum ſecabunt ad angulos rectos, ſintque eæ B H N, C I O, D K P, E L Q, F M X. harumque extrema alterna, connectant tranſuerſæ C R N, D S O, E T P, F V G, G X.



Erit igitur B N æqualis ipſi C A, & C N ipſi A D, & C O ipſi A E, & D O ipſi A F. eodemque modo, & rectæ E P, E Q, F Q, F X iiſdem ſigillatim ſumptis æquales oſtēdētur. & eſt G X ipſi B A æqualis, erunt itaque rectæ A B, B N, C N, C O, D O,

DP, EP, EQ, FQ, FX, GX, æquales duplæ ipsarum, AB, AC, AD, AE, AF, & præterea ipsi diametro DP, vel AG. addatur vtrisque AG diameter, erunt omnes dictæ cum diametro AG, duplę omnium AB, AC, AD, AE, AF, AG, est autem vt AH ad HB, id est AB vel GF ad FA, ita HR ad HN, & RI ad IC, & IS ad IO, & Sk ad KD, & KT ad KP, & TL ad LE, & VL ad LQ, & VM ad MF, & GM ad MX: vt igitur AB ad AF, ita AG ad omnes simul perpendiculares in diametrum AG, & permutando AB ad AG, vt AF ad omnes simul perpendiculares. iterum, est AH ad AB, id est FG vel AB ad AG, vt HR ad RN, & RI ad RT, & IS ad SO, & SK ad SD, & *K*T ad TP, & TL ad TE, & LV ad VQ, & VM ad VF, & MG ad GX, ergo vt AB ad AG, ita omnes A*H*, RI, &c. id est AG ad omnes transuersas simul: erat autem vt AB ad AG, ita AF ad omnes perpendiculares, erit igitur vt AB ad AG ita composita ex AF, AG, ad omnes transuersas & perpendiculares, & componendo vt AB ad AG, ita composita ex tribus AF, AG, AB, ad compositam ex omnibus perpendicularibus, omnibus transuersis, & recta AG, id est (vt demonstratum est] ad duplam omnium, AB, AC, AD, AE, AF, AG, quod erat demonstrandum.

Ergo à nemine priusagnita Mysteria, tam in Arithmeticis quam Geometricis, pandit Analytice sectionum Angularium.

PROBLEMA. I.

DAta numerò ratione angulorum dare rationem laterum.

Hoc abunde docuit theorema 3.

PROBLEMA: II.

FAcere vt numerus, ad numerum, ita angulum ad angulum.

In ratione minoris maioris-ve inæqualitatis ex theorematis 3. *6.* & *9.* satisfieri potest: at in maioris inæqualitatis ratione ex theorematis 5. & 8. huiusmodi deducitur

CONSECTARIVM.

QVoniam eadem recta circulo inscripta non diameter, duabus circumferentijs subtenditur, quarum vna minor est semicircumferentia circuli, altera maior, æqualitas inter subtensam minori maioriue, & subtensam segmento minoris, pertinebit ad subtensam quoque simili segmento maioris, & ad subtensas denique reliquis circũferentijs quæ æque-multiplices, maiorem minoremve in circulationibus

culationibus componunt.

Neque enim obstat illud quod theoremate 8. animaduersum est, quũ segmentum semicirculo maius in partes æquales distribuitur, siue diameter in sectiones incidat, siue secus, non enim mutatur adfectionum ad perpendiculares pertinentium qualitas, aut numerorũ ab ordine præscripto series: in secunda siquidẽ illius theorematis figura licet ex subtensa A H concludatur summa subtensarum G *B*,*B* I, post tamẽ ex differentia dictę summæ & subtensæ G B prius conclusę, id est ex subtensa B I, concluditur tandem differentia subtensarum ab A puncto eductarũ, quæ in sectiones ipsi I puncto vtrinque proximas, incidũt: quę igitur illic mutata sunt, hac operatione deinceps restituentur.

At in basium progressione, quum segmenta æqualia semiperipheriam excedunt, (vt ostensũ est Theoremate quinto.) inuertitur ordo homogeneorũ sub gradu, & fit progressio interdum qualis Theoremate nono est exposita, si quæ ex duplici analogismo subtensæ vtriusq; minimæ in vtraq; semiperipheria, ad differẽtias sibi vtrinq; proximarũ, mutata est inde eorũdẽ homogeneorum sub gradu qualitas, analogismis intermediæ ad aggregatum sibi vtrinque proximarum restituatur: quod quidem ex præscripto quinti Theorematis progressum facienti, satis constabit: atque hinc patescit consectarij veritas.

Ad sectiones itaque datorum angulorum deducũtur ex Theorematis sexto & nono Problematia, ad vsum quoties opus expostulat parata, quęque in in-

L

finitum pro ratione data extendi possunt. exemplum proponatur.

PROBLEMATION. I.

D*Atum angulum in tres partes æquales secare.*

Posito X radio, seu semidiametro circuli, B subtensa anguli subsecandi, E subtensa segmenti.

X quadratum in E ter, minus E cubo, æquetur X quadrato in B. & fiet E duplex:

1. Subtensa circumferentiæ subtriplæ.

2. Subtensa circumferentiæ reliquæ ad integrum circulum subtriplæ.

Siquidem vt supra ostensum est, æqualitas inter subtensam minori maioriue segmento, & subtensam segmento minoris, pertinet quoque ad subtensam simili segmento maioris.

PROBLEMATION. II.

D*Atum angulum in quinque partes æquales diuidere.*

Iisdem quæ prius suppositis.

X quadrato-quadratum in E 5. -- X quadrato in E cub 5. + E quadrato cubo.	æquetur X quadrato-quadrato in B.

Et fiet E triplex:

1. Subtensa circumferentiæ subquintuplæ.

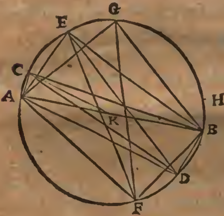
2. Subtensa circumferentiæ reliquæ ad integrũ

circulum ſubquintuplæ.

3. Subtenſa circumferentiæ compoſitæ ex circumferentia ſubquintupla, & dupla ſubquintupla totius circuli.

Quod poſtremum, rudioribus & in Analyticis minus fortaſſis exercitatis exemplo, ſic oſtendiſſe fuerit operæ-prætium.

Sit circulus cuius diameter A B, ſectus in ſegmenta inæqualia, quorum maius B A G, minus BHG, & ſit minoris ſegmenti ſubquintuplum B H, cui addatur ſegmentum H G C, æquale quintæ parti quatuor rectorum, neque enim compoſitum excedet ſemicirculum.



Segmenti itaque B G C quintuplum, æquale erit circumferentiæ ſubtendenti quatuor angulos rectos, ſiue integræ circulationi circa A punctum, & præterea ipſi circumferentiæ B G, & quinquies ſumptum ſegmentum B C, illud compoſitum metietur: repetatur quinquies, ſintque ſegmenta B G C, C A D, D B E, E A F, F B G: erit itaque ſegmentum B D, quod relinquitur ex integro circulo ſi inde auferatur B G C bis, duplum ipſius CA, reliqui ex ſemicirculo, ablato inde ſegmento BGC. er-

go & EC, æquale ipsi BD, (quum rectæ BC, CD, ipsis CD, DE sint ęquales.) duplum quoque erit ipsius CA, ac próinde & EA triplum ipsius CA.

Eademque ratione, quoniam rectæ CB, CD ipsis quoque ED, EF, sunt ęquales, erunt segmenta BD, DF ęqualia, & segmentum BF quadruplum ipsius CA: similiter sunt & segmenta GE, EC ęqualia, ac proinde & GA quintuplum segmenti CA. erit igitur triãgulum rectãngulum ACB anguli simpli, BAD dupli, BAE tripli, BAF quadrupli, BGA quintupli.

Posita igitur semidiametro, prima continuè proportionalium, & ipsa CB secunda, eaque serie continuata: erit ex sexto theoremate recta GB æqualis sextæ, minus quarta quinquies, plus secunda quinquies.

In notis, sit CK 1. *C B.* 1 N. *erit* 1. QC.--5 *cub.* + 5 *N æquale ipsi G* B.

PROBLEMATION. III.

D*Atum angulum in septem partes æquales dispescere.*

Suppositis quę supra.

X. cubo-cubus in E 7.	æquetur.
--X quadrato-quadrato in E cub. 14.	X cubo-
+ X quadrato in E quadrato-cubú 7.	cubo in
--- E quadrato-quadrato-cubo.	B.

1. Fit E quadruplex.

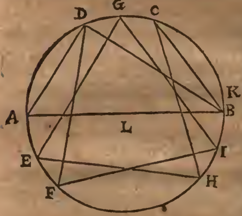
1. Subtensa peripherię subseptuplæ.

2. Subtensa subseptuplę, peripherię reliquę ad integrum circulum.

3. Subtensa peripherię compositę ex subseptupla, & dupla subseptupla totius circuli.

4. Subtensa peripheriæ compositę ex subseptupla, & quadrupla subseptupla totius circuli.

Quod & sic quoque declarabitur: sit circulus cuius diameter A B, in quo subtendatur recta C B, & sit peripheriæ C B pars septima B K, cui addatur peripheria K D, æqualis duplæ septimæ parti totius circumferentiæ, & ducatur B D, D A. dico angulum D B A septuplum, equalem esse quatuor rectis, & pręterea circumferentiæ A D C, ac proinde ex theorematé. 6. æqualitatem inter rectas B C, B K, explicabilem quoque & de terminis B D, B C.



Fiant æquales B D, D F, F I, I G, G E, E H, H C, & quoniam circumferentia D B septies sumpta, metitur quatuor rectos angulos, id est circumferentiam circuli A B integrā bis (, quū anguli ęstimentur in circumferentia,) & praętereacircumferentiam B C, igitur D B septies continuò inscripta, recidet tandem in punctum C. & quoniam lineæ B D, D F ponūtur aequales, erit circumferentia F B, dupla ipsius D A, (est enim F B, complementum duplae ipsius D B ad integrum circulum.) circumferentiae vero F B, aequalis est circumferentia D B I, quandoquidem ipsis B D, D F, aequales sunt rectae D F, F I, est itaque circumferen-

tia, A D I, tripla ipsius A D. eodemque modo, quia rectæ I G, G E, ipsis quoque D F, F I æquales sunt, erit circumferentia quoque B E, dupla ipsius A D, totaque A D B E, quintupla ipsius A D: & rectæ E H, H C iisdem quoque æquales, quare tota A D H E C, ipsius A D erit septupla. Ergo ex theoremate quinto,

Posita semidiametro A L prima continue proportionalium, ipsa D B secunda, eaque serie continuata, erit recta CB æqualis secundæ septies, minus quarta quaterdecies, plus sexta septies, minus octaua.

In notis si A L 1. D B. 1 N. 7. N -- 14. C. + 7 QC. -- 1QQC. æquabitur ipsi C B. similiter & de termino quarto explicabiur eadem æqualitas.

At vero ex præscripto theorematum quinti & octaui, constabit propositorum problematum in infinitum Amphibolia, sicut est superius declaratū. qui exempla desiderat, consulat Vietæ responsum ad problema Romani.

PROBLEMA. III.

LIneas rectas circūferentijs circuli in progressione arithmetica subtensas, ex data prima maxima vel minima inscripta, & secunda ei proxima, in numeris symmetris taxare.

Et hoc opus ex theorematis 6. 7. & 9. deducitur, quod illic clare propositum est & demonstratum.

PROBLEMA. IV.

LInearum circumferentijs circuli in progressione arithmetica subtensarum summam, ex data maxima et mi-

nima inscriptis, inquirere.

Hoc ostensum theoremate 10.

COROLLARIVM.

MAthematicum igitur Canonem, securè ac fœliciter construet Analysta, et constructum examinabit, adiutus analyticis hisce principijs, & edoctus methodum resoluendi potestates quascumque siue puras, siue affectas.

Ad constructionem autem, primum inquiratur perpendiculum vnius scrupuli, quam fieri potest accuratum, idque hac methodo.

1. Ex lateris hypothetici sectione extrema, & media ratione, dabitur perpendiculum partium. 18.

2. Ex eo per opus quintusectionis, inuenietur perpédiculum partium. 3.3′6.

3. Ex opere trissectionis, dabitur perpendiculum partium, 20.

4. Et hinc trissecando, perpendiculum partium. 6. 4′0.

5. Per opus bissectionis perpendiculum partium. 3. 2′0.

6. Ex differentia perpendiculorum, part. 3.3′6. & part. 3. 2′0 dabitur perpendiculũ 16″ ex primo theoremate.

7. Bissecando prodibũt perpendicula scrup. 8″.4″.2″.1.

Et regrediendo ad angulos in ratione multipla, perficietur reliqua in numeris symmetris ex lege sexti theorematis.

Et hæc quidem ſectionum angularium principia, ex purioris Analyſeos fonte deriuata, ex quibus et infinita alia pulcherrimæ ſpeculationis conſectaria deduci poſſunt, à Maximo iam à multis ſæculis Mathematico Franciſco Vieta, olim excogitata & propoſita, at ſine demonſtrationibus vllis ad nos tranſmiſſa, iam tandem plenè perfectéque iiſdem, idque ex Geometricis principijs, meo ſtudio confirmata (ô Nobiles Mathematici) accipite, & æqui bonique conſulite.

FINIS.